This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

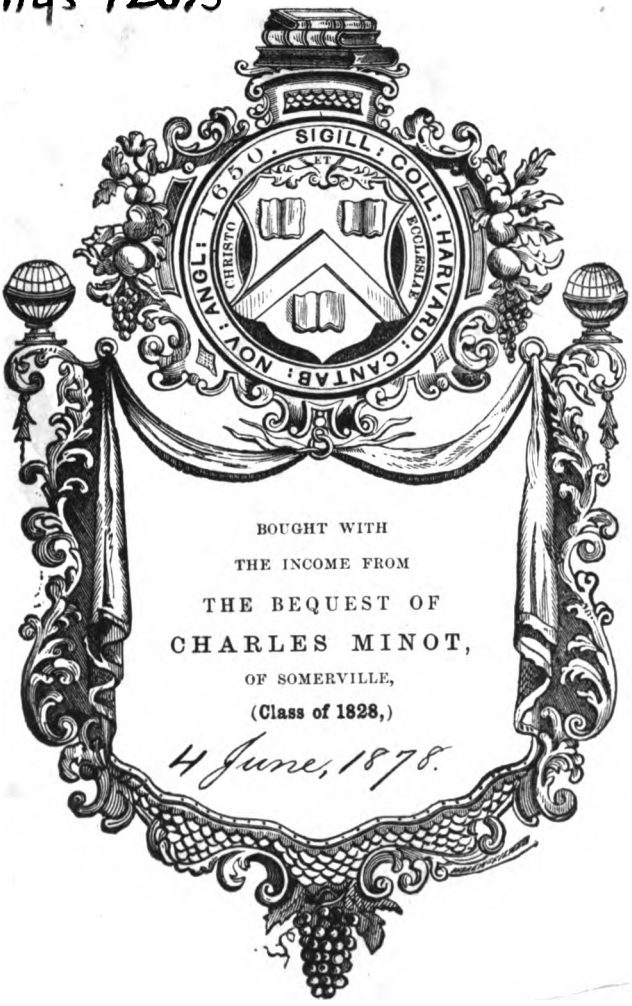
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Harvard College Library.
1877.

Phys 720.55

Phys 720.5



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

GESCHICHTE

DES

PRINCIPS DER KLEINSTEN ACTION.

AKADEMISCHE ANTRITTSVORLESUNG

VON

Dr. ADOLPH MAYER,

A. O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND CORRESPONDENT DER
K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.
1877.

Digitized by Google

~~1, 188~~
Phys 720.5

1878, June 4.
Minot Fund.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Digitized by Google

Hochgeehrte Versammlung!

Soviel Anregung und Interesse wir auch aus den Biographieen grosser Männer der Wissenschaft schöpfen können, so ist es doch fast noch lehrreicher, zu verfolgen, in welcher Weise eine wichtige Theorie, ein bedeutender Satz entstanden ist und im Laufe der Zeiten sich entwickelt und umgebildet hat. Eine solche Entwicklungsgeschichte ist es, die ich Ihnen vorführen möchte, und was mich dazu veranlasst hat, gerade das Princip der kleinsten Action zum Thema meines Vortrages zu wählen, ist nicht zum geringsten Theile das Dunkle und Verworrene gewesen, welches um dieses Princip selbst, wie um seine Beziehungen zur Geschichte und Wissenschaft einen geheimnissvollen Schleier gewoben hat, und welches schon in der deutschen Be-

Digitized by Google

zeichnung des Satzes als „Princip der kleinsten Wirkung“ charakteristisch zu Tage tritt, insofern dieser Name im Grunde genau das Entgegengesetzte von dem aussagt, was lange Zeit für den wesentlichen Inhalt des Princips und das grosse Grundgesetz der Natur galt. —

Von der Art, wie das Princip der kleinsten Action entstand, erhalten wir ein deutliches Bild aus den Briefen Daniel Bernoulli's an Leonhard Euler, die der Grossenkel Euler's, Paul Heinrich von Fuss, im zweiten Bande seiner Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres geomètres du XVIIIème siècle veröffentlicht hat, während die Euler'schen Antworten leider verloren gegangen sind.

Seitdem gegen das Ende des 17. Jahrhunderts von Johann Bernoulli das berühmte Problem der Brachistochrone oder der Curve des schnellsten Falles gestellt worden war, hatte sich das Interesse der Mathematiker mit Vorliebe den isoperimetrischen, d. h. denjenigen Problemen zugewandt, bei denen eine Curve durch die Forderung zu bestimmen ist, dass für dieselbe ein gegebenes Integral grösser oder kleiner werden soll, als für alle anderen benachbarten Curven, und es giebt unter der grossen Reihe von Männern ersten Ranges in jener grossen Zeit keinen, der sich nicht

Digitized by Google

vielfach in der Stellung und Lösung solcher Aufgaben versucht hätte. So finden wir denn auch in den dreissiger Jahren des 18. Jahrhunderts Daniel Bernoulli damit beschäftigt, gewisse schwierige Probleme der Statik, die Probleme des elastischen Fadens und Stabes, auf isoperimetrische Probleme zurückzuführen. Durch solche Zurückführungen erhält man, was immer ein grosser Vortheil ist, zwei ganz verschiedene Methoden zur Behandlung desselben Problems und Daniel Bernoulli fand, dass sich seine statischen Probleme durch die isoperimetrische Methode leichter behandeln liessen als mit Hülfe der bekannten mechanischen Principien. Sollte nun, was für das Gleichgewicht geglückt war, nicht auch für die Bewegung möglich sein? In der Dynamik knüpfte sich damals das Hauptinteresse an das Problem der Bewegung unter dem Einflusse von Centralkräften. Es war daher ganz natürlich, dass sich Daniel Bernoulli die Frage aufdrängte, ob man nicht auch die „Orbitas circa centra virium" könne „methodo isoperimetrica" herausbringen,*) und ebenso natürlich war es, dass er diese Frage dem Manne vorlegte, der schon damals auch in der Theorie der isoperimetrischen Probleme alle seine Vorgänger weit überholt hatte.

*) Brief v. 28. Jan. 1741.

Digitized by Google

Die Beantwortung der Frage scheint Euler nicht leicht geworden zu sein. Denn nach Verlauf von fast zwei Jahren*) kommt Daniel Bernoulli wieder und dringender darauf zurück. Aber spätestens im März 1743 hat Euler die Lösung gefunden; denn in einem Briefe vom 23. April desselben Jahres beglückwünscht ihn bereits Daniel Bernoulli zu seiner schönen Entdeckung.

Diese Entdeckung nun, die Euler jedoch erst im Herbste 1744 in dem, de motu projectorum überschriebenen, zweiten Anhange zu seinem berühmten Werke über die isoperimetrischen Probleme veröffentlichte, ist der einfachste Fall der richtigen und präcisen Form des Princips der kleinsten Action. Wir werden sehen, dass ihm diese richtige Form im Laufe der Zeit verloren ging und dass es bald ebensoviel an Strenge einbüssen sollte, als es an Allgemeinheit zu gewinnen schien.

Um aber nicht zweimal so ziemlich dasselbe sagen zu müssen, möge es mir gestattet sein, ohne Rücksicht auf die Zeitenfolge, Ihnen gleich jetzt das wahre Princip der kleinsten Action in seiner vollen Allgemeinheit vorzuführen, so wie dasselbe erst beinahe hundert Jahre

*) Brief v. 12. Dec. 1742.

Digitized by Google

später durch direkte Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von Jacobi aufgestellt worden ist.*)

Wenn ein System materieller Punkte nur gegenseitigen Anziehungen und Anziehungen nach festen Centren unterworfen ist, so lässt sich die Resultante aller auf irgend einen Punkt des Systems wirkenden Kräfte ihrer Grösse und Richtung nach sehr einfach vermöge einer einzigen Function, der Kräftefunction, durch die Massen und Coordinaten der Punkte ausdrücken, und es gehorcht dann im widerstandslosen Raume die Bewegung des Systems dem berühmten Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft, d. h. so lange keine Stösse im Systeme eintreten, ist stets die lebendige Kraft desselben, oder die halbe Summe der Produkte aus der Masse jedes Punktes in das Quadrat seiner Geschwindigkeit von der Kräftefunction nur um eine constante Grösse verschieden. Der Werth dieser Constanten ist vollständig bestimmt, sobald, wie ich im

*) Unter dem handschriftlichen Nachlasse Jacobi's finden sich mehrere, leider immer wieder abgebrochene Ansätze zu einer ausführlicheren Geschichte des Princips der kleinsten Action, denen ich vielfache Anregung und Belehrung verdanke. Dieselben enthalten namentlich auch sehr hübsche Betrachtungen, welche das Princip selbst dadurch anschaulicher zu machen suchen, dass sie die Action auf die Zeit, das dynamische Problem auf ein brachistochronisches zurückführen.

Digitized by Google

Folgenden voraussetze, die Grösse der lebendigen Kraft in irgend einer Lage des Systems, sowie diese Lage selbst gegeben ist, und der Satz gilt unverändert, gleichviel ob das System frei oder aber dem Zwange irgend welcher Bedingungen unterworfen ist, vorausgesetzt nur, dass die Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken, die Zeit selbst nicht enthalten.

Mit dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt nun immer zugleich auch das Princip der kleinsten Action und dieses sagt aus:

Wenn man die Summe der Produkte aus jeder Masse in das Quadrat ihres Bahnelementes mit dem Werthe multiplicirt, der sich aus dem Principe der lebendigen Kraft für die doppelte lebendige Kraft ergiebt, so hat, genommen zwischen zwei gegebenen Positionen des Systems, das Integral der Quadratwurzel dieses Produktes die Eigenschaft, dass dasselbe für die wirkliche Bahn des Systems kleiner wird als für alle anderen Bahnen, die das System zwischen den beiden gegebenen Positionen durchlaufen könnte, ohne die ihm vorgeschriebenen Bedingungen zu verletzen.*)

Dass auch hierbei eigentlich noch eine gewisse

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, p. 45.

Digitized by Google

Einschränkung zu beobachten ist, insofern jenes Integral nicht nothwendig immer ein wirkliches Minimum zu werden braucht, kann ich hier füglich übergehen, da dies für die Dynamik ganz nebensächlich ist. Die wahre Bedeutung des Satzes ist eben rein formaler Natur; sie besteht einzig und allein darin, dass derselbe, so oft das Princip der lebendigen Kraft gilt, die Bestimmung der Bahn und folglich, da, wenn die Bahn gefunden ist, die Zeit sich aus dem letzteren Principe durch eine blosse Quadratur ergiebt, auch der Bewegung des Systems auf ein Problem der Variationsrechnung zurückzuführen lehrt, und die complicirte Gestalt des in ihm auftretenden Integrales zeigt schon, dass es wohl unmöglich sein dürfte, für das Princip irgend welche metaphysische Ursache zu entdecken.

In genau derselben Form, nur dass an Stelle des Systems ein einzelner Punkt tritt, erscheint der Satz nun auch in jedem der Beispiele, die Euler nach einander untersucht, und aus denen er seinen Satz dadurch gewinnt, dass er nachweist, wie man aus der Forderung, dass jenes Integral ein Minimum werde, dieselben Curven, resp. dieselben Differentialgleichungen erhält, welche sich nach den Regeln der Dynamik für die Bahn des Punktes ergeben. Das allgemeine Resultat seiner Untersuchung drückt aber Euler anders aus.

Digitized by Google

Wenn man nämlich in das oben angegebene Integral für die Kräftefunction den aus der Gleichung der lebendigen Kraft folgenden Werth einsetzt und hierdurch die lebendige Kraft selbst wieder in das Integral hineinbringt, so stellt sich dasselbe dar als das nach der Zeit genommene Integral der doppelten lebendigen Kraft, oder auch als das Integral der Summe der Produkte aus der Masse jedes Punktes in seine Geschwindigkeit und sein Bahnelement, und daher kann man den Satz auch so aussprechen, dass unter denselben Bedingungen, wie vorhin, dieses letztere Integral ein Minimum wird, vorausgesetzt, dass man vermöge des Principes der lebendigen Kraft unter dem Integral-Zeichen alles durch solche Grössen ausgedrückt habe, die sich nur noch auf die Bahn des Systems beziehen.*)

In dieser Form spricht Euler seinen Satz allgemein aus für die Bewegung eines einzelnen Punktes und er hebt ganz ausdrücklich hervor, erstens, dass derselbe nur gelten könne, wenn das Princip der lebendigen Kraft Statt hat, also z. B. unmöglich gelten könne für Bewegung im widerstehenden Medium,**) und zweitens, dass man in dem Integrale die Geschwindigkeit „ex

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, p. 44.

**) De motu projectorum, 13, 14, 16.

Digitized by Google

viribus sollicitantibus per quantitates ad curvam pertinentes" ausdrücken müsse.*)

Woher aber kommt dem Satze der Name Princip der kleinsten Action? Um das zu erfahren, lassen Sie uns, nachdem wir s. z. s. Anfang und Ende des Princips kennen gelernt haben, nunmehr zusehen, was dasselbe inzwischen für Schicksale erlebte.

Während das Euler'sche Werk, wie schon bemerkt, erst im Herbst 1744 erschien, hatte am 15. April desselben Jahres Maupertuis der Pariser Akademie eine Abhandlung vorgelegt, in der er zur Erklärung der Reflexion und Brechung des Lichtes das, den damaligen Vorstellungen entgegenstehende Fermat'sche Princip der kürzesten Zeit durch eine andere, willkürliche Hypothese ersetzte.**) Noch spricht hier Mau-

*) Ib. 2.

**) Aus dem Fermat'schen Principe folgt, dass ein Lichtstrahl beim Uebergange aus einem Medium in ein anderes so gebrochen wird, dass die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels sich direkt wie die Geschwindigkeiten des Lichtes im ersten und im zweiten Medium verhalten. Nach der Emissionstheorie dagegen findet gerade das umgekehrte Verhältniss statt. Will man auf letzteres kommen, so braucht man nur — und das ist der ganze Inhalt der Maupertius'schen Abhandlung — an Stelle der Zeit, die der Strahl bedarf, um von einem gegebenen Punkte des einen Mediums zu einem gegebenen Punkte des andern zu gelangen, d. h. an Stelle der Summe der Wege, die der Strahl in dem einen und in dem

Digitized by Google

pertuis immer nur von der Bewegung des Lichtes. Zwei Jahre später aber, nachdem er unterdessen die ihm mit ganz ausserordentlichen Machtbefugnissen übertragene Präsidentschaft der Berliner Akademie angetreten hatte, dehnte er diese Hypothese überhaupt auf jede Bewegung aus und erklärte dieselbe in den Berliner Memoiren von 1746 für das universelle Princip des Gleichgewichtes und der Bewegung. Für die Bewegung drückt er dasselbe so aus: Wenn in der Natur irgend eine Veränderung vor sich geht, so ist die zu dieser Veränderung nöthige Menge von Action die kleinstmögliche; und als Grundgesetz des Gleichgewichtes nimmt er an, dass in der Ruhe die Körper, welche sich das Gleichgewicht halten, solche Lagen einnehmen müssen, dass, wenn man ihnen eine kleine Bewegung mittheilte, die hierdurch erzeugte Actionsmenge am kleinsten würde.

Dabei versteht er nach dem Vorgange von Leibniz unter Action, welches Wort jedoch hier nicht im Sinne von Wirkung genommen ist, sondern vielmehr Thätigkeit bedeuten soll, das Produkt aus der

---

anderen Medium zurücklegt, jeder Weg dividirt durch die constante Geschwindigkeit, mit der er zurückgelegt wird, die Summe der Produkte aus Weg und Geschwindigkeit einem Minimum gleichzusetzen.

Digitized by Google

Masse der Körper in ihre Geschwindigkeit und in den Raum, den sie durchlaufen.

Zum Beweise seines Universalprincipes leitet Maupertuis aus demselben die bekannten Gesetze des Stosses vollkommen harter und vollkommen elastischer Körper und das Hebelgesetz ab. Und das, sowie die frühere Ableitung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes ist Alles, was Maupertuis zur Begründung seines „Principes der kleinsten Menge von Action", des grossen Spargesetzes der Natur vorbringt, dessen wunderbare Weisheit klarer und würdiger als der Bau der Pflanzen und Thiere oder die Bewegung der Planeten die Existenz Gottes beweisen soll.

Um zu erkennen, auf wie schwacher Grundlage das mit solchem Pomp angekündigte Princip aufgeführt war, braucht man nur die beiden Aufsätze zu durchblättern, die der, durch Aufstellung des Princips der Erhaltung der Flächenräume berühmte Chevalier d'Arcy in den Pariser Memoiren von 1749 und 1752 dagegen geschrieben hat, und in denen er zeigt, wie ganz willkürlich Maupertuis mit dem umspringt, was er die zur Veränderung nöthige Actionsmenge nennt, und wie man, wenn man überhaupt mit diesem Worte irgend welchen bestimmten Sinn verbinden wolle, meist ganz etwas anderes darunter verstehen müsse, als was

Digitized by Google

Maupertuis lediglich desshalb einem Minimum gleich setzt, weil er sonst nicht zu den bekannten Formeln gekommen wäre. So ist es beim Licht die Summe der Actionen vor und nach der Brechung oder Reflexion, die ein Minimum wird, beim Stoss dagegen findet dasselbe nicht etwa statt für die Summe der Actionen vor und nach dem Stosse, sondern hier muss man, um die Gesetze des Stosses zu erhalten, die lebendige Kraft der durch den Stoss verloren gegangenen Bewegung zu einem Minimum machen, während man als diejenige Actionsmenge, welche die Veränderung beim Stoss bewirkt, doch füglich nur die durch den Stoss aufgebrauchte Action ansehen kann, die aber, einem Minimum gleichgesetzt, ein ganz absurdes Resultat ergiebt.*) Namentlich hübsch ist die Art, wie d'Arcy jene grosse Entdeckung, dass es die Action sei, mit der die Natur immer möglichst haushälterisch umgeht, durch eine einzige Figur schlagend widerlegt und an derselben darthut, dass bei der Lichtreflexion das Maupertuis'sche Princip ebenso gut ein Maximum als ein Minimum geben kann, sodass es einzig und allein von der geringeren oder grösseren Concavität des reflecti-

*) Aehnliche Einwürfe bringt auch die Encyclopédie im Artikel Cosmologie.

Digitized by Google

renden Spiegels abhängt, ob die grosse Sparerin Natur mit der grössten Oekonomie oder mit der unerhörtesten Verschwendung zu Werke geht.*) Auch das Gesetz des Gleichgewichtes, oder vielmehr die Art, wie Maupertuis es auf den Hebel anwendet, wird einer strengen Kritik unterzogen. Und in der That erkennt man aus dieser Anwendung, dass Maupertuis keine Idee davon hatte, dass man dem letzteren Gesetze einen richtigen Sinn unterlegen kann, indem es nämlich, wie Euler später gezeigt hat, durch den Satz der lebendigen Kraft sich darauf zurückführen lässt, dass in der Gleichgewichtslage die Kräftefunction ein Maximum oder Minimum wird, eine Eigenschaft des Gleichgewichtes, die in den einfachsten Fällen von Maupertuis selbst zuerst bemerkt und 1740 der Pariser Akademie als „Gesetz der Ruhe" mitgetheilt worden war. Der Umstand aber, dass der Satz erst durch diese Zurückführung auf einen andern bekannten Satz anwendungsfähig wird, erklärt es zugleich, warum der Name Princip der kleinsten Action sich für das statische Gesetz nicht erhalten hat, sondern in der Folge ausschliesslich auf das dynamische Princip beschränkt worden ist.

Mit dem Euler'schen Satze hat Maupertuis'

*) Memoires de l'Academie de Paris 1752 p. 511.

Digitized by Google

Princip nur eine ganz äusserliche Formenähnlichkeit, insofern für eine gleichförmige Bewegung das Euler'sche Integral des Produktes von Masse, Geschwindigkeit und Bahnelement der Action gleich wird — daher denn auch später jenes Integral selbst die Action genannt worden ist — und diese Aehnlichkeit verschwindet noch dazu gänzlich, wenn man sich der wahren Bedeutung des Euler'schen Integrales erinnert. Ueberdies setzt Euler das Princip der lebendigen Kraft als nothwendige Bedingung voraus und Maupertuis sucht die Universalität seines Principes gerade darin, dass es allgemeiner sei, als jenes. Endlich hat die Fassung, die Maupertuis seinem Bewegungsprincipe gegeben hat, nur Sinn für plötzliche Geschwindigkeitsänderungen und er erhält aus demselben auch immer nur endliche Gleichungen, während der Euler'sche Satz sich ausschliesslich auf eine stetige Bewegung bezieht und die Differentialgleichungen der Bahn liefert.*)

Wenn daher Maupertuis in der Vorerinnerung zu seiner Abhandlung der Euler'schen Entdeckung als einer schönen Anwendung seines Principes Erwähnung thut, aus dem er aber Wahrheiten einer höhern und

*) Vgl. wegen des letzten Punktes: Carnot, Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement Paris 1803, Préface p. 6.

Digitized by Google

wichtigern Art ziehen wolle, so sollte man erwarten, dass Euler dies entschieden als eine ganz unberechtigte Anmaassung müsste aufgefasst haben, die er zwar aus Rücksicht gegen seinen mächtigen Akademiepräsidenten nicht wohl gebührend zurückweisen konnte, die er aber doch wenigstens vollständig todtschweigen würde. Allein Euler schweigt durchaus nicht; in den Schriften der Berliner Akademie von 1751, die aber, was wohl zu beachten ist, erst 1753 herauskamen, findet er vielmehr gar nicht Worte genug, um seine unbeschränkte Verehrung für das Maupertuis'sche Princip der kleinsten Action und dessen universelle Bedeutung an den Tag zu legen, während er zugleich seinen eigenen Satz nur noch für einen ganz speciellen Fall dieses grossen Principes gelten lässt.

Um dieses sehr auffällige Benehmen Euler's zu erklären, muss ich noch von einer andern Entgegnung sprechen, die 1751 im Märzhefte der Leipziger Acta Eruditorum gegen die Maupertuis'sche Abhandlung erschien, und die Veranlassung zu einem erbitterten Streite wurde, aus dem die Sieger nicht gerade mit Ruhm bedeckt hervorgingen.

Der Verfasser dieser zweiten Entgegnung, Samuel König, hatte ein ziemlich unruhiges Leben hinter sich. Gleichzeitig mit Maupertuis Schüler von Johann

Digitized by Google

Bernoulli*) war er später wegen politischer Umtriebe aus seiner Vaterstadt Bern verbannt worden, hatte dann mehrere Jahre hindurch Voltaire's berühmter Freundin, der Marquise du Chatelet, Unterricht in der Mathematik gegeben, sich aber mit dieser wieder überworfen und endlich als Professor an der Universität Franeker eine feste Stellung erhalten. Auch war er auf Daniel Bernoulli's warme Empfehlung hin**) auswärtiges Mitglied der Berliner Akademie geworden. Auf seine zum grössten Theile sehr wohl begründeten sachlichen Einwürfe, die sich vorzüglich gegen die Auffassung des Gleichgewichtes als derjenigen Lage, für welche die Action ein Minimum wird, und dagegen richten, dass dasselbe allgemeiner sein solle, als das Princip der lebendigen Kraft, brauche ich hier nicht näher einzugehen. Denn nicht durch diese, sondern durch das Fragment eines angeblichen Briefes von Leibniz an Hermann, das König seiner Dissertation beifügte, wurde jener denkwürdige Streit entzündet, dessen Verlauf mehr oder weniger ausführlich in jeder Biographie Voltaire's oder Friedrich's des Grossen beschrieben wird.

*) Fuss, Correspondance t. II., p. 426. Histoire de l'académie de Berlin 1759 p. 473 u. p. 479.

**) Brief an Euler vom 13. Juni 1744.

Digitized by Google

Nach jenem Briefe hätte bereits Leibniz bemerkt, dass in den Modificationen der Bewegungen die Action gewöhnlich ein Maximum oder ein Minimum würde, und dass man hieraus unter anderen wichtigen Folgerungen auch die Bahn eines von einem oder von mehreren Centren angezogenen Körpers ableiten könne.

Hiermit wurde sowohl Maupertuis als auch Euler die Priorität ihrer Sätze streitig gemacht. Nun war es aber von vornherein äusserst verdächtig, dass Leibniz so bedeutende Entdeckungen gemacht und doch niemals veröffentlicht haben sollte. Der Gedanke an eine Fälschung musste sich daher von selbst darbieten und in der That ist jenes Brieffragment wohl ohne allen Zweifel erdichtet. Aber der Beweis der Unechtheit konnte nicht erbracht werden. Denn König gestand zu, dass er den Brief nur in Abschrift besässe, und der, von dem er diese Abschrift haben wollte, war vor mehreren Jahren wegen aufrührerischer Versuche in Bern enthauptet worden. Nachforschungen sowohl unter den in Beschlag genommenen Papieren des Hingerichteten, als auch unter dem handschriftlichen Nachlasse Hermann's konnten, wenn der Brief untergeschoben war, natürlich ebenfalls ein wirkliches Beweismaterial nicht liefern. Als daher trotz dieses Mangels an einem wirklichen Beweise auf Maupertuis' Antrag hin die Ber-

Digitized by Google

liner Akademie am 13. April 1752 den fraglichen Brief für falsch und seinen Inhalt für null und nichtig erklärte,*) erhob sich gegen dieses Verfahren und vor Allem gegen den Anstifter desselben ein allgemeiner Sturm des Unwillens.

Schon durch frühere Vorgänge auf Maupertuis erbittert, aber auch aus Mitgefühl für den Unterdrückten nimmt nunmehr Voltaire für den Letzteren Partei und auf der andern Seite tritt der König, der zwar Voltaire's beissende Satiren mit grossem Vergnügen las, aber doch den von ihm eingesetzten Präsidenten seiner Akademie nicht zum allgemeinen Gespött wollte werden lassen, für Maupertuis in die Schranken ein, und nach öffentlicher Verbrennung der zweiten meisterhaften Spottschrift Voltaire's, der Diatribe des Dr. Akakia, endet das Ganze mit dem Bruche zwischen Friedrich und Voltaire und damit, dass die Aufregung gegen Maupertuis und das Urtheil der Berliner Akademie sich nur immer weiteren Kreisen mitgetheilt hatte.

Ich musste eine kurze Schilderung dieses ganzen unerquicklichen Streites vorausschicken, um es verständlich werden zu lassen, wie Euler dazu geführt werden

*) Histoire de l'académie de Berlin 1750, p. 64.

Digitized by Google

konnte, mit Maupertuis gemeinschaftliche Sache zu machen und trotz der gänzlichen inneren Verschiedenheit beider Sätze seine bedeutende Entdeckung dem vagen Maupertuis'schen Principe vollständig unterzuordnen. Die Erbitterung hatte eine solche Höhe erreicht, dass eine vermittelnde Stellung zwischen beiden Parteien unmöglich geworden war, und man darf nicht übersehen, dass Euler ausser durch seine Stellung und durch die gemeinsame Prioritätsfrage auch schon durch das, was die König'sche Abhandlung gegen das Minimum der Action im Falle des Gleichgewichts vorbringt, nothwendig in das Maupertuis'sche Lager hinübergedrängt werden musste. Nur eins könnte uns vielleicht Wunder nehmen, dass nämlich Euler in den gegen König und zur Vertheidigung Maupertuis' geschriebenen Aufsätzen die gewichtigen d'Arcy'schen Ausstellungen gänzlich ignorirt. Das aber erklärt sich auf das Allernatürlichste durch die Bemerkung, dass die Schriften der Pariser Akademie von 1749 auf dem Titelblatt das Publications-Datum 1753 aufweisen.

Es ist jedoch bei Euler ganz entschieden noch ein zweites innerliches Motiv wirksam gewesen. In seinem Aufsatze über das Princip der kleinsten Action fügt er, nachdem er auseinandergesetzt hat, wie sein Satz nur ein specieller Fall des allgemeinen Princips

Digitized by Google

von Maupertuis und noch dazu erst nach diesem veröffentlicht worden sei, hinzu: „Ueberdies habe ich diese schöne Eigenschaft nicht a priori, sondern a posteriori bemerkt.“*) Diese Hochachtung vor dem a priori, seine bekannte Vorliebe für metaphysische Speculationen, das ist, glaube ich, ebenfalls ein nicht zu unterschätzender Factor gewesen, der ihn immer und immer wieder zu dem Maupertuis'schen Principe hingezogen hat. Sie tritt schon in den Schlussworten seines Aufsatzes De motu projectorum in bekannter sehr wunderbarer Weise zu Tage**) und vergeblich kämpft Daniel Bernoulli gegen dieselbe an, der ihm z. B. einmal schreibt:***) „Herr Rampseck hat meinem Vater geschrieben, dass Sie in unterschiedenen controversiis metaphysicis publicis stehen. Sie sollten sich nicht über dergleichen Materien einlassen; denn von Ihnen erwartet man nichts als sublime Sachen und es ist nicht möglich, in jenen zu excelliren“.

So treffen wir denn auch in den durch den König-Maupertuis'schen Streit hervorgerufenen Aufsätzen

---

*) Mémoires de l'académie de Berlin, 1751, p. 214.

**) Vgl. Jacobi, Vorles. über Dynamik, p. 43. Dühring, kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin 1873, p. 298.

***) Brief vom 29. April 1747.

Digitized by Google

Euler's wirkliche Beweise nur noch für den Fall des Gleichgewichtes an, während die Bewegung mit dem kühnen Schlusse abgefunden wird: „Wenn es die Intention der Natur sei, beim Gleichgewicht an Kraftanstrengungen zu sparen, so müsse sich diese Absicht doch auch auf die Bewegung erstrecken."*) Und nicht zufrieden damit, dass er das Gesetz der Ruhe nur auf strengem mechanischen Wege begründet hat, versucht er sogar gleich darauf, auch für dieses eine rein metaphysische Demonstration zu geben.**)

Es versteht sich jedoch von selbst, dass in diesen Euler'schen Abhandlungen das Princip der kleinsten Action immerhin noch in einer weit vernünftigeren Form erscheint, als bei Maupertuis. Die Action wird definirt als das Integral des Produktes aus Masse, Geschwindigkeit und Bahnelement und es ist keine Rede davon, dass das Princip gelten könne, ohne das Princip der lebendigen Kraft. Aber auch von jener wesentlichen Bedingung, dass man mittelst des letzteren Principes unter dem Integral-Zeichen alles auf blosse Raumgrössen zurückführen muss, ist nirgends mehr die Rede

*) Mémoires de l'académie de Berlin 1751, p. 175.

**) Ib. p. 246.

Digitized by Google

und kann auch nicht wohl die Rede sein, da die Anführung derselben den ganzen Schein von Aehnlichkeit zwischen der Euler'schen Entdeckung und dem Maupertuis'schen Principe sofort würde zerstört haben. Dass aber durch Weglassung dieser Bedingung unser Satz völlig sinnlos wird, erhellt sofort daraus, dass in dem Actions-Integrale die auf das System wirkenden Kräfte gar nicht vorkommen. Es kann daher unmöglich die Aufgabe, die Action an sich zu einem Minimum zu machen, auf eine Lösung führen, die, wie die Bahn des Systems, wesentlich von den Kräften abhängt.

Während somit Euler selbst immer mehr und mehr auf Kosten der Strenge die metaphysische Nothwendigkeit des Principes der kleinsten Action hervorzukehren sucht, ist es interessant zu sehen, wie ganz anders Daniel Bernoulli darüber dachte und wie richtig er die wahre Natur des Satzes erkannt hatte. So schreibt er z. B. am 25. Dec. 1743 an Euler: „Ich zweifle, ob man jemals a priori werde zeigen können, dass die elastica müsse maximum solidum generiren; ich betrachte solches als eine Proprietät, die der calculus ausweiset und die kein Mensch ex principiis novis würde haben vorhersehen können, ebensowenig wie die identitatem isochronae et brachystochronae. Dergleichen proprietates sind ratione nostri gleichsam accidental,

Digitized by Google

und auf diesen Fuss betrachte ich auch die observatam proprietatem orbitarum etc.“

Ja klingt es nicht, als ob Daniel Bernoulli die ganze Vollendung der analytischen Form geahnt habe, welche der Mechanik noch aus der Variationsrechnung erwachsen sollte,*) wenn er, mit besonderem Bezug auf das Problem der Centralbewegung, ein andermal (12. Dec. 1742) sagt: „Man kann die principia maximorum et minimorum nicht genugsam ausforschen .... Meiner Meinung nach ist dieses argumentum inter omnia pure analytica utilissimum und ist dieses ein wahres Exempel, dass vel sola propositio problematis, wenn man auch die Solution nicht hätte, saepe maxima laude digna sey.“

Aber das, was Daniel Bernoulli im Geiste vorgeschwebt haben mag, wirklich auszuführen, war einem andern vorbehalten. Als der 23jährige Lagrange die Variationsrechnung von den Fesseln der Geometrie befreit und ihr die jetzige analytische Form gegeben hatte, musste sich seine Aufmerksamkeit nothwendig auch auf den Euler'schen Satz lenken, dessen grosse formale Bedeutung seinem, durch keinerlei metaphysische Neigung getrübten Scharfblicke nicht entgehen

*) Bemerkung von Jacobi.

Digitized by Google

konnte. In den Turiner Miscellaneen von 1760—1761 dehnte Lagrange nicht nur, wie er selbst es nennt, das Princip der kleinsten Action auf alle diejenigen Probleme der Mechanik aus, bei denen nur gegenseitige Anziehungen und Anziehungen nach festen Centren wirksam sind, sondern zog auch bereits aus demselben nahezu alle die grossen Resultate, die er später in der Mécanique analytique auf anderem Wege abgeleitet hat, sodass, wie Jacobi*) mit Recht bemerkt, das Lagrange'sche Princip der kleinsten Action die Mutter unserer ganzen analytischen Mechanik geworden ist.

Aber gleich als ob seit Maupertuis' Einmischung auf dem Princip der kleinsten Action der Fluch der Unklarheit ruhte, so zeigt sich nun hier die allerwunderlichste Erscheinung, dass wir, wenigstens mit absoluter Sicherheit, gar nicht anzugeben vermögen, welchen Satz eigentlich Lagrange das allgemeine Princip der kleinsten Action genannt hat, ja dass nach meiner Meinung das Princip, dem Lagrange so bedeutende Resultate verdankte und das er später, gleich als ob er diese Unklarheit herausgefühlt hätte, unverdienter Weise wieder ganz bei Seite schob, ein von dem Euler-Jacobi'schen Principe der kleinsten Action schon durch seine

*) Vorlesungen über Dynamik p. 2.

Digitized by Google

Gültigkeitsbedingungen völlig verschiedener Satz und zwar derselbe Satz ist, der unter ganz anderem Namen auch der letzten und grossartigsten Entfaltung der Mechanik nach ihrer analytischen Seite hin zum Ausgangspunkte gedient hat.

So nämlich, wie Lagrange das Princip ausspricht, hat dasselbe keinen Sinn. Denn er lässt jene nothwendige Bedingung, dass man vermöge der Gleichung der lebendigen Kraft die Zeit aus dem Actions-Integrale eliminiren muss, vollständig weg. So also kann Lagrange den Satz unmöglich gemeint haben. Daher hat schon der Herausgeber der 3. Auflage der Mécanique analytique, Josef Bertrand, die Bemerkung hinzugefügt, dass die Lagrange'sche Fassung des Princips der kleinsten Action ungenau sei und dass nach dem Beweise, den Lagrange giebt, der Satz vielmehr so lauten müsse:

Von einer gegebenen Anfangs- bis zu einer gegebenen Endzeit genommen wird das Integral der doppelten lebendigen Kraft für die wirkliche Bewegung des Systems kleiner, als für alle anderen Bewegungen, die, nach Herstellung neuer Verbindungen, das System von der gegebenen Anfangs- zur gegebenen End-Position

Digitized by Google

überführen könnten, ohne die Gleichung der lebendigen Kraft zu ändern.*)

Und in der That könnte man vom rein mathematischen Standpunkte aus diesen Satz als eine äquivalente Form des Euler-Jacobi'schen Princips gelten lassen. Wenn aber Lagrange in der angegebenen Weise die Gleichung der lebendigen Kraft allen den Bewegungen, mit denen die wirklich erfolgende Bewegung verglichen werden soll, als Bedingungsgleichung vorgeschrieben hätte, so wäre sein Beweis des Princips wie ich bei einer anderen Gelegenheit**) nachgewiesen habe, falsch und zwar derartig falsch, dass man das Raisonnement nur einen einzigen Schritt weiter fortzuführen braucht, um zu zeigen, dass nach demselben überhaupt gar keine Bewegung, sondern Ruhe eintreten müsste. So also kann doch ein Lagrange wiederum nicht geschlossen haben. Bleibt also nach meiner Ansicht nur noch ein einziger Ausweg übrig, der nämlich, dass Lagrange, weit davon entfernt, die Gleichung

*) Mécanique analytique, 3. Aufl., T. I, p. 277. Vgl. auch Handbuch der theoretischen Physik von Thomson und Tait. 1. Bd., 1. Th., p. 259.

**) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Jahrgang 1871, p. 174.

Digitized by Google

der lebendigen Kraft als vorgeschriebene Bedingungsgleichung zu betrachten, dieselbe vielmehr nur dazu benutzt hat, um das Integral, welches die Action darstellt, zurückzuführen auf ein anderes Integral und zwar auf das nach der Zeit genommene Integral der lebendigen Kraft plus der Kräftefunction.*) Ist aber diese Auffassung, durch welche der Lagrange'sche Beweis vollkommen klar und streng wird, richtig, so ist das Princip, dem wir die grossen mechanischen Entdeckungen Lagrange's zu verdanken haben, nichts anderes, als jener berühmte, erst 1835 von Hamilton**) wirklich ausgesprochene Satz, der alle Probleme der Mechanik, in denen sämmtliche wirksame Kräfte durch eine Kräftefunction darstellbar sind, unabhängig davon, ob das Princip der lebendigen Kraft gilt oder nicht, auf die Variationsrechnung zurückführt, es ist dann kein anderes, als das Hamilton'sche Princip,***) welches sonach, um eine Jacobi'sche Ausdrucksweise zu gebrauchen, 75 Jahre lang zugleich entdeckt und verborgen gewesen wäre. —

---

*) Es sind nicht eigentlich die Integrale selbst, sondern ihre Variationen, die Lagrange auf einander zurückführt.

**) Philos. Transactions 1835, I., p. 99.

***) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, p. 58.

Digitized by Google

So sehen wir denn das Princip der kleinsten Action in der Geschichte wie in der Wissenschaft eine sehr unklare und zweideutige Rolle spielen. In seiner Jugend wird es in einen Streit verwickelt, der, wesentlich doch nur durch die hochfahrende Unklarheit der Begriffe, die Maupertuis in dasselbe hineingebracht hatte, ermöglicht, mit seinen letzten Folgen in die Geschichte hinübergreift, und im reiferen Alter leistet es in der Wissenschaft das Grösste, indem es mit einem Andern und Grössern verwechselt wird. Und wenn wir uns nun fragen, was dasselbe heut zu Tage für eine Bedeutung hat, so können wir darauf nur antworten:

Das Princip der kleinsten Action, wie es Euler und Jacobi gefasst haben, ist ein sehr schöner, und insofern er unter Ersparung von zwei Integrationen direkt auf die Differentialgleichungen der Bahn führt, auch ein sehr brauchbarer Satz, der aber dem Hamilton'schen und den anderen älteren Principien der Mechanik gegenüber im Grunde doch auf den hohen Namen eines Principes einen wirklichen Anspruch nicht wohl erheben kann. Was dagegen die Bertrand'sche Form des Principes anbetrifft, für die überdies erst noch der Beweis zu erbringen wäre, so ist von dieser irgend welcher Zweck oder Nutzen ganz und gar nicht abzusehen. Denn dieselbe kann, so zu sagen trotz eines ganz

Digitized by Google

unverhältnissmässigen Kostenaufwandes, doch auf alle Fälle nur in beschränktem Maasse das leisten, was das Hamilton'sche Princip weitaus einfacher und naturgemässer erreicht. —

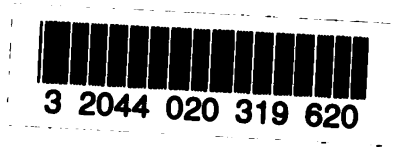
Und nun, nachdem wir uns über die mechanische Bedeutung des Princips der kleinsten Action klar geworden sind, zum Schlusse nur noch ein Wort auch über den metaphysischen Grundgedanken desselben! Ist denn jene uralte Vorstellung von der Natur als einer sparsamen Arbeiterin wirklich nur eine schöne Illusion, die aber bei näherer Betrachtung sich in nichts auflöst? Nein, durchaus nicht! Die grosse Arbeiterin Natur ist vielmehr immer darauf bedacht, ihre Zwecke mit den kleinstmöglichen Mitteln zu erreichen, aber sie spart nicht an Action, nicht an lebendiger Kraft oder Energie, sie spart vielmehr, wie uns Gauss' wunderbar anschauliche Darstellung des Fundamentalprincips der Mechanik gelehrt hat, an dem, was auch wir Menschen uns, wo wir nur irgend können, am Allerliebsten ersparen, sie spart am Zwange. Das aber weiter auszuführen, gehört nicht in die Geschichte des Princips der kleinsten Action!

Digitized by Google

Digitized by Google

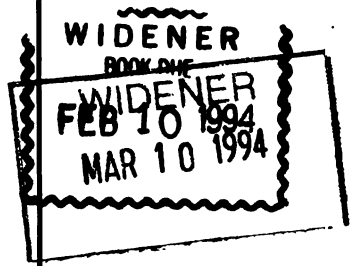
Digitized by Google

Digitized by Google


3 2044 020 319 620

THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.

Harvard College Widener Library
Cambridge, MA 02138 (617) 495-2413



Digitized by Google